

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΑΛΑΣΣΙΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ ΙΙ (8ο ΕΞΑΜΗΝΟ)**  
**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 7/6/2010**  
**ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ΩΡΕΣ**  
**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ: 3+1 bonus**  
**ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ: 100+1 bonus**

**ΠΡΟΣΟΧΗ! ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 1, 2.**

**ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3 & 4.**

**ΛΥΣΕΙΣ ΜΕ ΜΠΛΕ**

Δώστε πλήρεις εξηγήσεις και απαντήστε σε όλες τις ερωτήσεις για να λάβετε πλήρη βαθμό. Ανεπαρκείς εξηγήσεις θα λάβουν μειωμένο βαθμό. Επιτρέπονται οι σημειώσεις και τα πάσης φύσεως γραπτά βοηθήματα. Η συνεργασία απαγορεύεται.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (35 μοναδες)**

Ο Γιωργος θελει να διαλεξει ενα απο τα εξης 4 τυχερα παιχνιδια

A: Εισπραττει 500 ευρω η 0 ευρω με ισες πιθανοτητες

B: Εισπραττει 300 ευρω με πιθανοτητα 0,3 η 200 ευρω με πιθανοτητα 0,7

Γ: Εισπραττει 400 ευρω με πιθανοτητα 0,2 η πληρωνει 100 ευρω με πιθανοτητα 0,8

Δ: Εισπραττει 600 ευρω η πληρωνει 300 ευρω με ισες πιθανοτητες

Η συναρτηση χρησιμοτητας του ειναι  $u(x,y) = 2x-y$ , οπου

x ειναι το ποσό που θα εισπραξει απο το παιχνιδι που επελεξε και

y ειναι το ποσό που θα εισπραττει εαν πραγματοποιουνταν η βελτιστη δυνατη εκβαση απο ολα τα παιχνιδια που ΔΕΝ επελεξε, αλλα μονο εαν αυτη εχει χρηματικο αποτελεσμα  $> x$ , αλλιως  $y=0$ .

Υπο την εννοια αυτη, το y απεικονιζει τις τυχον 'τυψεις' που θα ειχε για καθε του επιλογη και εκβαση.

(α) (25 μοναδες) Εαν θελει να μεγιστοποιησει την προσδοκωμενη χρησιμοτητα του, ποιο παιχνιδι θα διαλεξει;

| παιχνιδι | p   | x    | y   | $u=2x-y$ | pu   |
|----------|-----|------|-----|----------|------|
| A        | 0,5 | 500  | 600 | 400      | 200  |
|          | 0,5 | 0    | 600 | -600     | -300 |
|          |     |      |     | Σ        | -100 |
| B        | 0,3 | 300  | 600 | 0        | 0    |
|          | 0,7 | 200  | 600 | -200     | -140 |
|          |     |      |     | Σ        | -140 |
| Γ        | 0,2 | 400  | 600 | 200      | 40   |
|          | 0,8 | -100 | 600 | -800     | -640 |
|          |     |      |     | Σ        | -600 |

|          |     |      |   |          |      |
|----------|-----|------|---|----------|------|
| $\Delta$ | 0,5 | 600  | 0 [προσοχη!<br>$y=0$ και όχι 500<br>γιατι $500 < x$ ] | 1200     | 600  |
|          | 0,5 | -300 | 500   | -1100    | -550 |
|          |     |      |   | $\Sigma$ | 50   |

Αρα η καλύτερη επιλογή είναι το  $\Delta$ .

(β) (10 μονάδες) Πως συγκρίνεται η επιλογή αυτή με την επιλογή εάν η συνάρτηση χρησιμότητας του Γιωργου ήταν  $u(x)=x$  ;

| παιχνίδι | p   | x        | px   |
|----------|-----|----------|------|
| A        | 0,5 | 500      | 250  |
|          | 0,5 | 0        | 0    |
|          |     | $\Sigma$ | 250  |
| B        | 0,3 | 300      | 90   |
|          | 0,7 | 200      | 140  |
|          |     | $\Sigma$ | 230  |
| Γ        | 0,2 | 400      | 80   |
|          | 0,8 | -100     | -80  |
|          |     | $\Sigma$ | 0    |
| $\Delta$ | 0,5 | 600      | 300  |
|          | 0,5 | -300     | -150 |
|          |     | $\Sigma$ | 150  |

Αρα η καλύτερη επιλογή είναι το A.

[στην πρώτη περίπτωση διαλέγει το  $\Delta$  κυρίως γιατί αυτή η επιλογή θα του προκαλέσει λιγότερες τυψεις από τις άλλες]

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (35 μονάδες)

Πλοίο ωφελιμου φορτίου 11.000 τόννων περιμένει να φορτώσει. Υπάρχουν 4 κατηγορίες φορτίων.

Η κατηγορία 1 έχει βάρος 4.000 τόννους και αξία 5 εκ. ευρώ ανά τεμαχίο.

Η κατηγορία 2 έχει βάρος 3.000 τόννους και αξία 4 εκ. ευρώ ανά τεμαχίο.

Η κατηγορία 3 έχει βάρος 2.000 τόννους και αξία 3 εκ. ευρώ ανά τεμαχίο.

Η κατηγορία 4 έχει βάρος 5.000 τόννους και αξία 2 εκ. ευρώ ανά τεμαχίο

Υπάρχει απεριόριστος αριθμός τεμαχίων ανά κατηγορία.

Θέλουμε να γεμίσουμε το πλοίο με μίγμα φορτίων μέγιστης συνολικής αξίας ώστε να μη βουλιάξει.

(α) (5 μονάδες) Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα βελτιστοποίησης, με καταλληλό ορισμό των μεταβλητών απόφασης.

$$\text{Max } 5x_1+4x_2+3x_3 +2x_4$$

$$\text{με περιορισμούς } 4x_1+3x_2+2x_3 +5x_4 \leq 11$$

$$x_j \geq 0 \text{ και ακέραιοι } (j=1,\dots,4)$$

οπου  $x_j$  είναι ο αριθμός τεμαχίων της κατηγορίας  $j$  ( $j=1,\dots,4$ )

(β) (10 μονάδες) Εάν είναι επιτρεπτά κλασματικά φορτία, ποια είναι η βελτιστή λύση και η μέγιστη συνολική αξία; Εάν η βελτιστή αυτή λύση στρογγυλοποιηθεί (κλασματικά φορτία μη επιτρεπτά), ποια είναι η μέγιστη συνολική αξία;

Αν τα  $x_j$  μπορεί να είναι κλασματικά, τότε η βελτιστή λύση είναι όλα τα  $x_j$  είναι μηδέν εκτός από εκείνο για το οποίο ο λόγος του συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης προς τον αντίστοιχο συντελεστή στον περιορισμό είναι μέγιστος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτό συμβαίνει για την 3<sup>η</sup> κατηγορία (λόγος = 3/2), άρα η λύση είναι

$$x_3 = 11/2 = 5,5 \text{ με μέγιστη αξία } 16,5 \text{ εκ. ευρώ.}$$

Στρογγυλοποιημένο,  $x_3 = 5$  με μέγιστη αξία 15 εκ. ευρώ. Προφανώς, αυτή η λύση είναι προσεγγιστική και όχι αναγκαστικά βελτιστή. Τα 15 εκ. ευρώ είναι παντως ένα κάτω όριο για τη μέγιστη συνολική αξία (όπως και τα 16,5 εκ. ευρώ είναι ένα ανώ όριο!). Υποψη ότι με τη λύση αυτή, το πλοίο δεν είναι πλήρως γεμάτο.

(γ) (20 μονάδες) Με χρήση δυναμικού προγραμματισμού, προσδιορίστε τη βελτιστή λύση και τη μέγιστη συνολική αξία εάν δεν είναι επιτρεπτά κλασματικά φορτία.

Η βελτιστή λύση εδώ βγαίνει η εξής

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 4$$

με μέγιστη αξία 16 εκ. ευρώ (και το πλοίο 100% γεμάτο).

Για επαγωγική σχέση και τρόπο επίλυσης, βλ. σημειώσεις.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 (30 μονάδες)

Δυο ακτοπλοϊκές εταιρίες ανταγωνίζονται στην ίδια αγορά, με μόνη μεταβλητή απόφαση τους ναύλους που η κάθε μια χρεώνει. Αν  $A$  είναι ο ναύλος της εταιρίας 1 και  $B$  ο ναύλος της εταιρίας 2, τότε τα κλάσματα κίνησης  $x_1$ ,  $x_2$  που αντίστοιχα θα αποσπάσει η κάθε εταιρία δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = A(1-0,01A)(0,0004B-0,01)$$

$$x_2 = 1 - x_1$$

Υποθέτουμε ότι η συνολική κίνηση των 2 εταιριών είναι σταθερή.

Ξέρουμε επίσης ότι  $50 \leq A \leq 100$  και  $50 \leq B \leq 100$  (ευρώ ανά επιβάτη)

(α) (10 μονάδες) Εάν  $B=100$  ευρώ, ποιά τιμή του  $A$  μεγιστοποιεί το εισόδημα της εταιρίας 1;

Αν  $B=100$ , τότε το εισόδημα της εταιρίας 1 είναι αναλογο του  
 $Ax_1 = A^2 (1-0,01A)(0,0004B-0,01) = 0.03 A^2 (1-0,01A)$ , το οποιο μεγιστοποιειται για  
 $A = 66,67$  ευρω.

(β) (10 μονάδες) Εάν  $A=50$  ευρώ, ποιά τιμή του  $B$  μεγιστοποιεί το εισόδημα της εταιρίας 2;

Αν  $A = 50$ , τότε το εισόδημα της εταιρίας 2 είναι αναλογο του

$Bx_2 = B(1-25(0,0004B-0,01))$ , το οποιο μεγιστοποιειται για  $B= 62,5$  ευρω.

(γ) (10 μονάδες) Ποιά πρέπει να είναι η τιμή του  $B$ , ώστε το μέγιστο εισόδημα της εταιρίας 1 να είναι όσο πιο χαμηλό γίνεται;

Για καποια δεδομενη τιμη του  $B$ , το μεγαστο εισοδημα της εταιριας 1 προκυπτει απο τη μεγιστοποιηση ως προς  $A$  της παραστασης

$$E(A,B) = A^2 (1-0,01A)(0,0004B-0,01)$$

Ειναι προφανες απο τη μορφη της  $E$  οτι η βελτιστη τιμη του  $A$  (εκεινη που μεγιστοποιει την  $E$ ) δεν εξαρταται απο το  $B$ , οντας ιση με 66,67 ευρω (βλ. ερωτηση α). Ομως η  $E$  ειναι αυξουσα συναρτηση του  $B$ , αρα οσο πιο χαμηλο ειναι το  $B$ , τοσο πιο χαμηλο γινεται το μεγαστο  $E$  (ως προς  $A$ ).

Το κατω οριο του  $B$  ειναι 50 ευρω, αρα αν  $B=50$  ευρω, το μεγαστο δυνατο εισοδημα της εταιριας 1 ειναι οσο πιο χαμηλο γινεται.

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 (35 μονάδες)

Η κινήση σε καποια ακτοπλοική γραμμή είναι εντονα εποχικη και δινεται απο τη σχεση

$$X(t) = 5+5\cos[\pi(t-6)/6],$$

οπου  $X(t)$  είναι η κινήση επιβατων (σε χιλιαδες) κατα το μηνα  $t$  ( $t=1, \dots, 12$ : 1=Ιανουαριος). Υποθεστε ζητηση πληρως ανελαστικη.

Η εξυπηρετηση παρεχεται απο συμβατικο Ε/Γ-Ο/Γ που είναι δρομολογημενο στη διαδρομη. Υποθεστε οτι το κοστος εξυπηρετησης της γραμμης αυτης είναι σταθερο και ισο με 400.000 ευρω ανα μηνα εξυπηρετησης εαν το πλοιο είναι σε λειτουργια.

Εαν το πλοιο είναι σε ακινησία για οποιοδήποτε λόγο, το κόστος είναι 50.000 ευρώ ανα μήνα.

(α) (5 μοναδες) Εαν ο μέσος ναυλος (περιλαμβανομένων και οχημάτων) είναι 60 ευρώ ανα επιβατή και είναι σταθερός κατά τη διάρκεια του έτους, ποιες μήνες αποφέρουν κέρδος στον πλοιοκτήτη;

| ΜΗΝΑΣ  | Χ           | ΕΙΣΟΔΗΜΑ  | ΚΟΣΤΟΣ    | ΚΕΡΔΟΣ     |
|--------|-------------|-----------|-----------|------------|
| 1      | 0.669872884 | 40,192    | 400,000   | -359,808   |
| 2      | 2.499999866 | 150,000   | 400,000   | -250,000   |
| 3      | 4.999999884 | 300,000   | 400,000   | -100,000   |
| 4      | 7.499999933 | 450,000   | 400,000   | 50,000     |
| 5      | 9.330127    | 559,808   | 400,000   | 159,808    |
| 6      | 10          | 600,000   | 400,000   | 200,000    |
| 7      | 9.330127    | 559,808   | 400,000   | 159,808    |
| 8      | 7.499999933 | 450,000   | 400,000   | 50,000     |
| 9      | 4.999999884 | 300,000   | 400,000   | -100,000   |
| 10     | 2.499999866 | 150,000   | 400,000   | -250,000   |
| 11     | 0.669872884 | 40,192    | 400,000   | -359,808   |
| 12     | 0           | 0         | 400,000   | -400,000   |
| ΣΥΝΟΛΟ | 60          | 3,600,000 | 4,800,000 | -1,200,000 |

Αρα κερδοφόροι μήνες είναι Απρίλιος μέχρι και Αυγούστος.

(β) (10 μοναδες) Εαν το πλοιο λειτουργεί 12 μήνες, τι ελάχιστο μέσο ναυλο ανα επιβατή (σταθερό κατά τη διάρκεια του έτους) πρέπει να χρεώνει ώστε να μην χάνει σε ετήσια βάση;

Ο ναυλος αυτός προκύπτει ίσος με 80 ευρώ ανα επιβατή (=4.800.000/60.000).

(γ) (10 μοναδες) Εαν η Πολιτεία επιβάλλει υποχρέωση 10μηνιαίας εξυπηρέτησης (όλους τους μήνες πλην Ιανουαρίου και Δεκεμβρίου, κατά τους οποίους το πλοιο είναι σε ακινησία), ποιος πρέπει να είναι ο ελάχιστος μέσος ναυλος ανα επιβατή (σταθερός κατά τη διάρκεια του έτους) για να μην είναι η γραμμή ζημιογόνα σε ετήσια βάση;

Ο ναυλος αυτός προκύπτει ίσος με 68,33 ευρώ ανα επιβατή.

| ΜΗΝΑΣ  | Χ           | ΕΙΣΟΔΗΜΑ  | ΚΟΣΤΟΣ    | ΚΕΡΔΟΣ   |
|--------|-------------|-----------|-----------|----------|
| 1      | 0.669872884 | 45,775    | 50,000    | -4,225   |
| 2      | 2.499999866 | 170,833   | 400,000   | -229,167 |
| 3      | 4.999999884 | 341,667   | 400,000   | -58,333  |
| 4      | 7.499999933 | 512,500   | 400,000   | 112,500  |
| 5      | 9.330127    | 637,559   | 400,000   | 237,559  |
| 6      | 10          | 683,333   | 400,000   | 283,333  |
| 7      | 9.330127    | 637,559   | 400,000   | 237,559  |
| 8      | 7.499999933 | 512,500   | 400,000   | 112,500  |
| 9      | 4.999999884 | 341,667   | 400,000   | -58,333  |
| 10     | 2.499999866 | 170,833   | 400,000   | -229,167 |
| 11     | 0.669872884 | 45,775    | 400,000   | -354,225 |
| 12     | 0           | 0         | 50,000    | -50,000  |
| ΣΥΝΟΛΟ | 60          | 4,100,000 | 4,100,000 | 0        |

(δ) (10 μοναδες) Εαν η Πολιτεια θελει να επιβαλει πλαφον 50 ευρω στο μεσο (σταθερο) ναυλο και 12μηνη υποχρεωση λειτουργιας, τι ετησια επιδοτηση πρεπει να δωσει στην ακτοπλοικη εταιρια ωστε αυτη να μη χανει σε ετησια βαση;

| ΜΗΝΑΣ  | Χ           | ΕΙΣΟΔΗΜΑ  | ΚΟΣΤΟΣ    | ΚΕΡΔΟΣ     |
|--------|-------------|-----------|-----------|------------|
| 1      | 0.669872884 | 33,494    | 400,000   | -16,506    |
| 2      | 2.499999866 | 125,000   | 400,000   | -275,000   |
| 3      | 4.999999884 | 250,000   | 400,000   | -150,000   |
| 4      | 7.499999933 | 375,000   | 400,000   | -25,000    |
| 5      | 9.330127    | 466,506   | 400,000   | 66,506     |
| 6      | 10          | 500,000   | 400,000   | 100,000    |
| 7      | 9.330127    | 466,506   | 400,000   | 66,506     |
| 8      | 7.499999933 | 375,000   | 400,000   | -25,000    |
| 9      | 4.999999884 | 250,000   | 400,000   | -150,000   |
| 10     | 2.499999866 | 125,000   | 400,000   | -275,000   |
| 11     | 0.669872884 | 33,494    | 400,000   | -366,506   |
| 12     | 0           | 0         | 400,000   | -50,000    |
| ΣΥΝΟΛΟ | 60          | 3,000,000 | 4,800,000 | -1,800,000 |

Αρα η επιδοτηση πρεπει να ειναι 1.800.000 ευρω.

#### **ΕΡΩΤΗΣΗ BONUS (1 μοναδα)**

Απαντηστε ΝΑΙ/ΟΧΙ χωρις εξηγηση

Σωστη απαντηση: +1 μοναδα

Λαθος απαντηση: -1 μοναδα

Μη απαντηση: 0 μοναδα

Η Ελλάδα θα νικησει τη Ν. Κορεα το Σαββατο στο Μουντιαλ.

**ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΟΧΙ**